文章编号:1004-3918(2015)08-1291-03

关于Smarandache LCM函数的一个下界估计

张利霞， 赵西卿， 韩建勤
（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要：应用初等方法与组合方法研究Smarandache LCM函数 $SL(n)$ 在 2^p+1 和 2^p-1 上的下界估计问题. 给出并证明了 $SL\left(2^p+1\right)\geqslant 10p+1$；$SL\left(2^p-1\right)\geqslant 10p+1$，其中素数 $p\geqslant 17$.

关键词：Smarandache LCM函数；下界估计；初等方法；组合方法
中图分类号：O 156.4 **文献标识码**：A

A Lower Bound Estimate for the Smarandache LCM Function

Zhang Lixia， Zhao Xiqing， Han Jianqin
（School of Mathematics and Computer Science，Yanan University，Yan'an 716000，Shaanxi China）

Abstract: We use the elementary and combinational methods to study the lower bound estimate problem of the Smarandache LCM function for 2^p+1 and 2^p-1. It is given and proved the Estimate $SL\left(2^p+1\right)\geqslant 10p+1$；$SL\left(2^p-1\right)\geqslant$ 10p+1, when $p\geqslant 17$ be any prime.

Key words: Smarandache LCM function；lower bound estimate；elementary methods；combinational methods

对于任意正整数n，F. Smarandache LCM函数定义为最小的正整数k使得$n\,|\,[1,2,\cdots,k]$，即$SL(n)=\min\{k: k\in\mathbb{N}, n\,|\,[1,2,\cdots,k]\}$. 从$SL(n)$的定义容易推出，如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式，那么$SL(n)=\max\left\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\right\}$. 由此，当$n$较小时不难算出：

$$SL(1)=1, SL(2)=2, SL(3)=3, SL(4)=4, SL(5)=5, SL(6)=3, SL(7)=7, SL(8)=8, SL(9)=9, SL(10)=5.$$

近年来许多学者对$SL(n)$的初等性质进行了研究,并获得了许多有意义的结果，例如文献[2]研究了均方差$\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2$的均值分布问题，证明了对给定的整数$k\geqslant 2$，对任意实数$x\geqslant 2$，有渐进式

$$\sum_{n\leqslant x}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2=\frac{4}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{C_i x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中: $\zeta(n)$为Riemann Zeta-函数，$C_i(i=2,3,\cdots,k)$为可计算的常数.

文献[3]研究了方程$\sum_{d|n}SL(d)=n$，得出有且仅有两个正整数解n=1，28. 文献[4]研究了复合函数$SL\left(Z(n)\right)$的均值，并得到一个较强的渐进式

收稿日期：2015-02-20
基金项目：陕西省教育厅专项科研计划项目（11JK0489）；延安大学自然科学专项科研基金项目（YDZ2013-4）
作者简介：张利霞（1989-），女，研究生，从事数论方面的工作研究
通信作者：赵西卿（1965-），男，副教授，硕士生导师，从事解析数论方面的研究.

$$\sum_{n\leqslant x} SL(Z(n)) = \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中: $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数; $Z(n)$ 为著名的伪Smarandache函数.

关于Smarandache函数 $S(n)$ 和 $Z(n)$ 的相关下界估计问题已经有许多有意义的成果,例如文献[5]研究了 $S(2^p+1)$ 的下界估计问题,给出对于任意的素数 $p\geqslant 17$,我们有估计式 $S(2^p+1)\geqslant 6p+1$;文献[6]研究了 $Z(a^p+b^p)$ 的下界估计问题,得出对任意不同的正整数 a 和 b,对任意的素数 $p\geqslant 17$ 有 $Z(a^p+b^p)\geqslant 10p$. 但关于函数 $SL(n)$ 的有关下界估计问题的研究至今无文献可参考,至少查阅不到,本文受到文献[5-10]启示,利用初等方法和组合方法,研究了函数 $SL(n)$ 在某一特殊数列上的下界估计问题.

1 相关引理

引理1 对于任意素数 $p\geqslant 17$,数 2^p+1 必有大于3的素因子 q,且 $q=h\cdot 2p+1$,其中 $h\in\mathbb{N}$.

证明 要证引理成立,我们首先需证 2^p+1 不可能是3的方幂. 应用反证法,假设 $2^p+1=3^\alpha(\alpha\in\mathbb{N})$,当 $\alpha=2k$ 时 $0\equiv 2^p=3^{2k}-1\equiv -1(\mathrm{mod}\ 8)$ 矛盾. 当 $\alpha=2k+1$ 时 $1\equiv 2^p+1=3^{2k+1}\equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ 矛盾,证毕. 故 2^p+1 至少含有大于3的素因子 q,显然 $q\geqslant 5$ 且 $q|2^p+1$,即 $2^p\equiv -1(\mathrm{mod}\ q)$,进而有 $2^{2p}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$,因此,$2p$ 是2模 q 的指标,由指标的性质[11]有 $2p|\varphi(q)=q-1$,故可得 $q=h\cdot 2p+1$,其中 $h\in\mathbb{N}$.

引理2[12] 设素数 p 是奇素数,则对一切 n 有 $(n|p)\equiv n^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\ p)$,如果当 $(n|p)=1$,则 n 是模 p 的二次剩余. 当 $(n|p)=-1$,则 n 是模 p 的二次非剩余.

2 主要结论及证明

定理 对任意的素数 $p\geqslant 17$,我们有估计式

① $SL(2^p+1)\geqslant 10p+1$;② $SL(2^p-1)\geqslant 10p+1$.

证明 首先根据Smarandache函数 $SL(n)$ 的性质得:任意的素数 $p|n$,对所有正整数 α 有 $SL(n)\geqslant p$ 且 $p|SL(p^\alpha)$. 然后结合引理1,需对 2^p+1(其中是 $p\geqslant 17$ 素数)分四种情况进行讨论,具体如下.

(a)当 2^p+1 除3外至少含4个大于3的互异的素因子时,显然根据函数 $SL(n)$ 的性质有素因子 q 使得:

$$SL(2^p+1)\geqslant SL(q)\geqslant 5\cdot 2p+1=10p+1.$$

(b)当 2^p+1 除3外仅含1个大于3的互异的素因子时,我们需对 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(6p+1)^\beta$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(8p+1)^\beta$ 进行验证. 这里我们只对 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$,其他类似可证结论成立. 若 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$,则当 $\beta\geqslant 5$ 时,显然有

$$SL(2^p+1)\geqslant SL\left((2p+1)^\beta\right)\geqslant\beta\cdot 2p+1=10p+1.$$

但当 $\beta=4$ 时,若 $\alpha=2k$, $2^p+1=\left[3^k(2p+1)^2\right]^2$, $0\equiv 2^p=\left[3^k(2p+1)^2\right]^2-1\equiv -1(\mathrm{mod}\ 8)$ 矛盾. 当 $\alpha=2k+1$ 时, $1\equiv 2^p+1=3^{2k+1}(2p+1)^4\equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ 矛盾,故 $\beta\neq 4$. 当 $\beta=3$ 时,若 $\alpha=2k$,则

$$2^p=3^{2k}(2p+1)^3-1=3^{2k}(8p^3+12p^2+6p)+(3^k+1)(3^k-1)$$

成立,因为 $4|2^p$, $4|(3^k+1)(3^k-1)$,但 $4\nmid 3^{2k}(8p^3+12p^2+6p)$ 矛盾. 若 $\alpha=2k+1$, $2^p+1=3^{2k}(2p+1)^3$. 当 k=0时,由 $p\geqslant 17$,有 $2^p+1\geqslant 3(2p+1)^3$;当 $k\geqslant 1$ 时, $2^p+1=3^{2k+1}\cdot(2p+1)^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3^2)$,则 $2^{2p}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3^2)$. 因此,$2p$ 是2模9的指标,由指标的性质[11]有 $2p|\varphi(9)=6$,即 $p|3$,这与 $p\geqslant 17$ 矛盾. 所以 $\beta\neq 3$. 同理可证 $\beta\neq 1$, $\beta\neq 2$.

（c）当 2^p+1 除3外仅含两个大于3的互异的素因子时，因为当素数 $p>3$ 时，$3\mid(2p+1)(4p+1)$，即 2^p+1 不可能同时含素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$．同理可知 2^p+1 不可能同时含素因子 $4p+1$ 和 $8p+1$．所以，设 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(8p+1)^\gamma$．这里我们只对 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$，其他类似可证结论成立．

若 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$，则当 $\beta\geqslant5$ 或 $\gamma\geqslant2$ 时，显然有

$$SL(2^p+1)\geqslant SL\left((2p+1)^\beta\right)\geqslant\beta\cdot2p+1=10p+1$$

或

$$SL(2^p+1)\geqslant SL\left((6p+1)^\gamma\right)\geqslant\gamma\cdot6p+1\geqslant10p+1.$$

当 $4\geqslant\beta\geqslant1$，$\gamma=1$ 时，对 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)$ 两边同时取素数模 $2p+1$，则有 $2^p\equiv-1(\bmod(2p+1))$．由引理2得

$$\left(2\mid(2p+1)\right)\equiv2^{\frac{(2p+1)-1}{2}}\equiv2^p\equiv-1(\bmod(2p+1)),$$

故2是素数模 $2p+1$ 的二次非剩余．同理，2是素数模 $6p+1$ 的二次非剩余．但当 $p=8k+3$ 时，$\left(2\mid(2p+1)\right)=(-1)^{\frac{(2p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{4k+2}=1$．同理，当 $p=8k+1$ 时，$\left(2\mid(6p+1)\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{12k+2}=1$．这显然与2是素数模 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次非剩余矛盾．

（d）当 2^p+1 除3外恰含3个大于3的互异的素因子时，当引理1中的 $h\geqslant5$ 时，显然有 $SL(2^p+1)\geqslant10p+1$．当 $h\leqslant4$ 时，因为 $2p+1$ 和 $4p+1$；$4p+1$ 和 $8p+1$ 不可能同时为素数，所以设 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma\cdot(8p+1)^\delta$，当 $\beta\geqslant5$ 或 $\gamma\geqslant2$ 或 $\delta\geqslant2$ 时，定理显然成立．当 $4\geqslant\beta\geqslant1$ 或 $\gamma=\delta=1$ 时，对 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma\cdot(8p+1)^\delta$ 两边同时取素数模 $2p+1$，有2是素数模 $2p+1$ 的二次非剩余．同理，2是素数模 $6p+1$ 的二次非剩余．但当 $p=8k+3$ 时，$\left(2\mid(2p+1)\right)=(-1)^{\frac{(2p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{4k+2}=1$．同理，当 $p=8k+1$ 时，$\left(2\mid(6p+1)\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{12k+2}=1$．这显然前后产生了矛盾．

结合以上几种情况则完成了定理（1）式的证明，同理可证定理（2）式成立．

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems，not solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[2] 赵院娥. 关于Smarandache LCM函数的一类均方差问题[J]. 纯粹数学与应用数学，2008，24(1)：71-74.

[3] 贺艳峰，潘晓玮. 一个包含Smarandache LCM函数的方程[J]. 数学学报：中文版，2008，51(4)：779-786.

[4] 刘　华，吕松涛. 一个包含F. Smarandache函数的复合函数[J]. 江西科学，2009，27(3)：325-327.

[5] 苏娟丽，尚松叶. 关于Smarandache函数的一个新的下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学，2008，24(4)：706-708.

[6] 高　丽，郝虹斐，鲁伟阳. 伪Smarandache函数的一个下界估计[J]. 河南科学，2014，32(5)：707-710.

[7] 高　丽，郝虹斐，鲁伟阳. Smarandache函数在数列 a^p-b^p 上的下界估计[J]. 延安大学学报：自然科学版，2014，33(3)：2-3.

[8] 李芬菊，杨畅宇. 关于Smarandache函数的一个下界估计[J]. 西北大学学报：自然科学版，2011，41(3)：377-379.

[9] 温田丁. Smarandache函数的一个下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(3)：413-416.

[10] 鲁伟阳，高　丽，郝虹斐，等. 关于伪Smarandache函数的一个下界估计[J]. 陕西科技大学学报，2014，32(6)：180-183.

[11] 潘承洞. 数论基础[M]. 北京：高等教育出版社，2012.

[12] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

（编辑　康　艳）